

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Окрестность точки



Окрестность точки

Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty$, $-\infty$, ∞ .



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



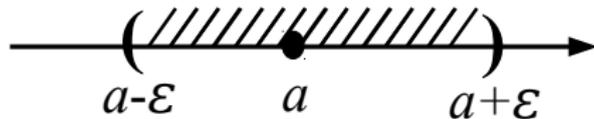
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

$$2) a = +\infty$$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



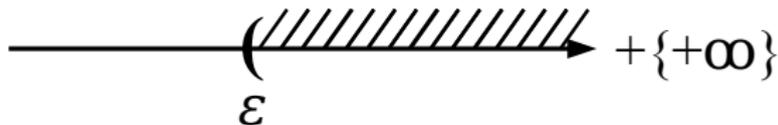
Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

$$2) a = +\infty$$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



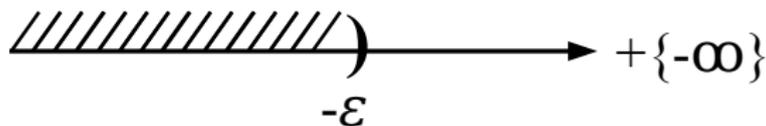
Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



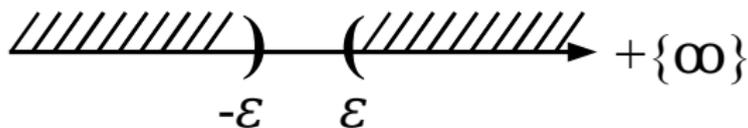
Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε .



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается.



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.



Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a , т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$

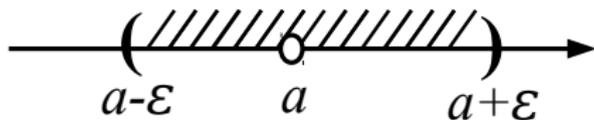


Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a , т.е.

$$\mathring{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность

$$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$$



Типы стремления переменной к точке



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x ,
которая принимает последовательно значения
 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x , которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a .



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

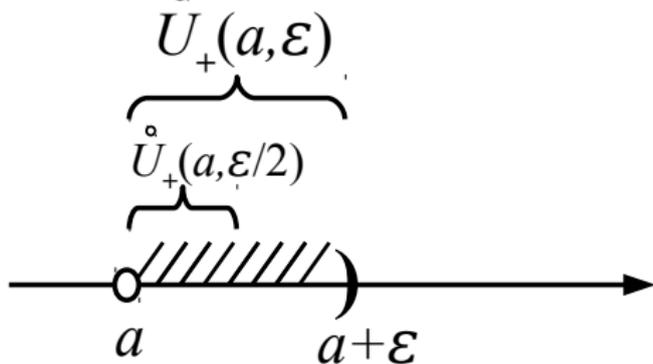
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

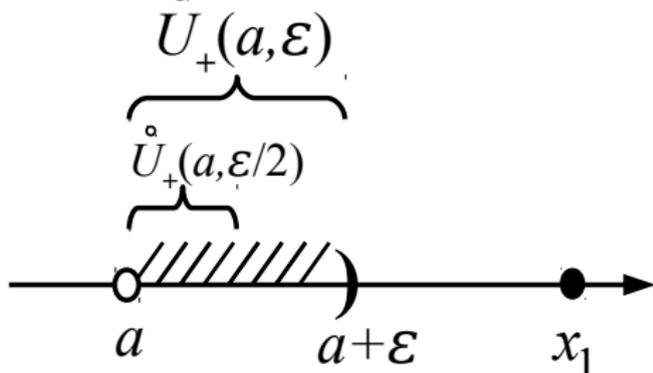
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

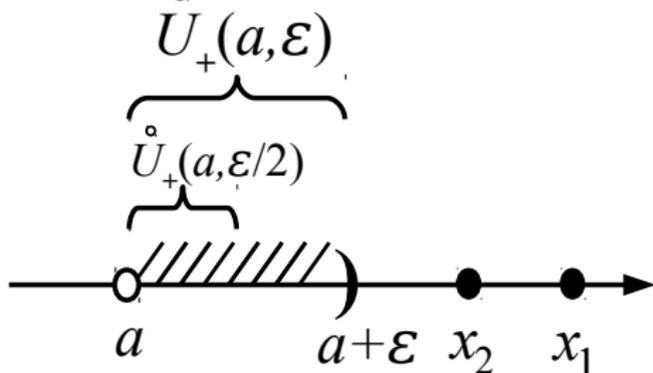
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

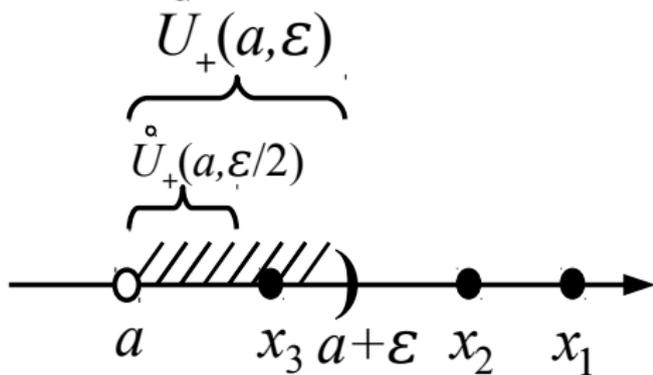
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

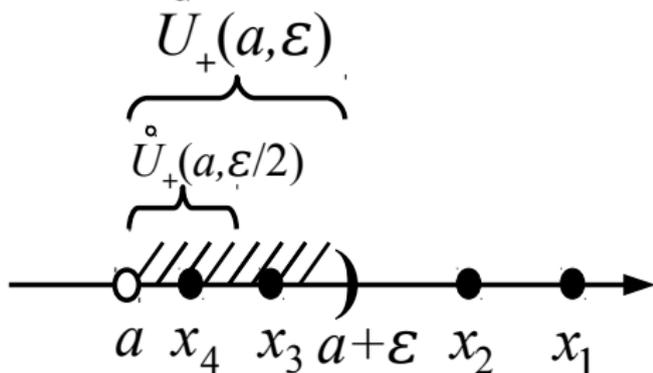
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

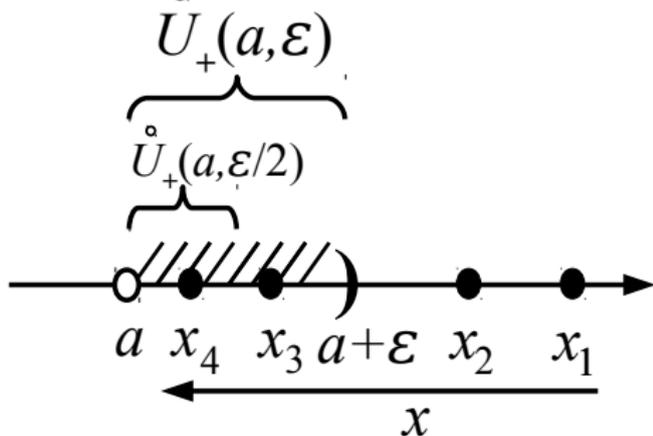
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

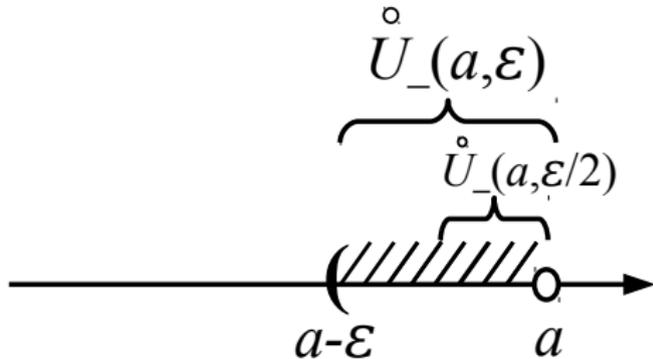
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

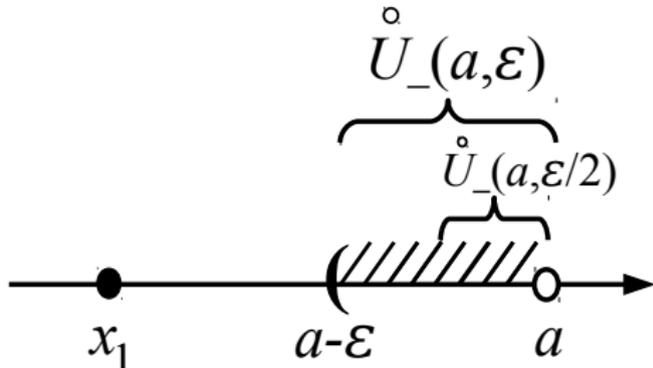
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

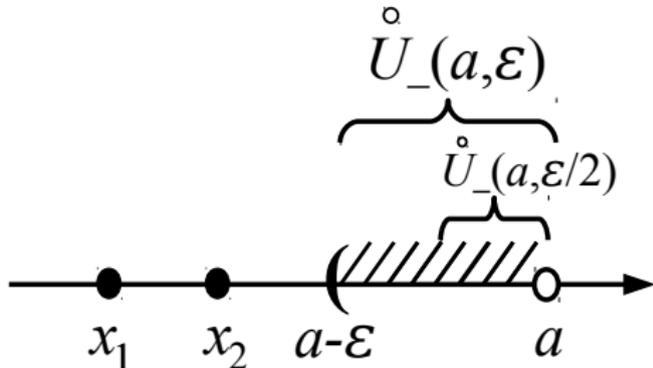
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

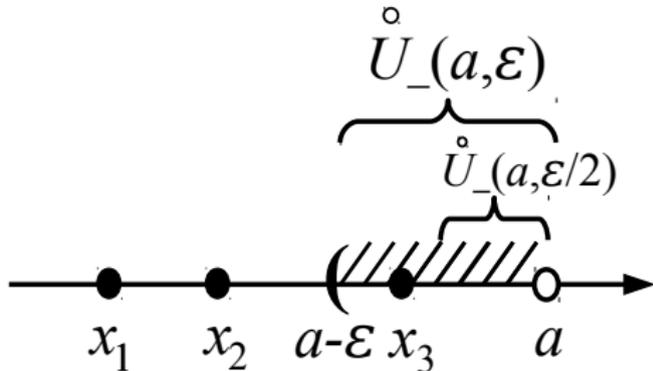
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

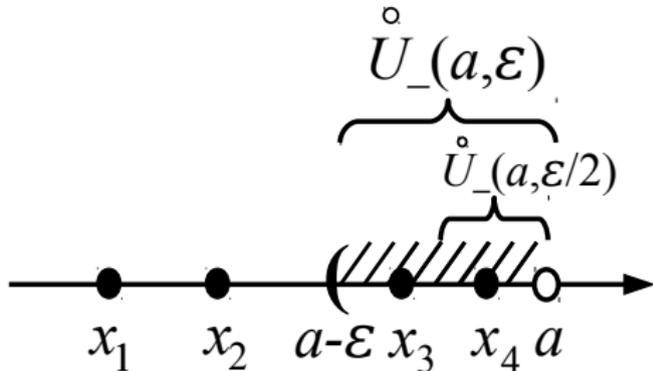
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

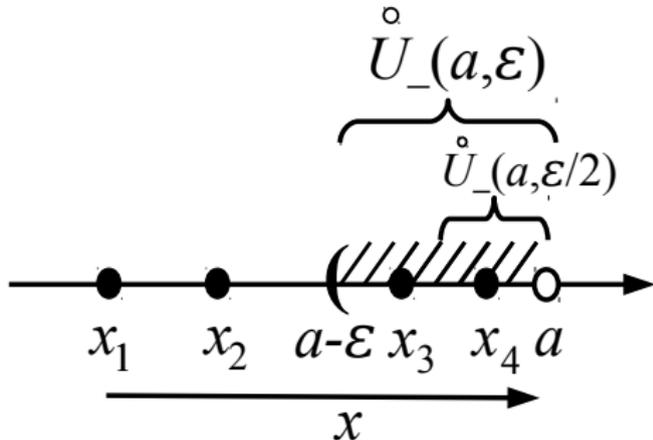
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

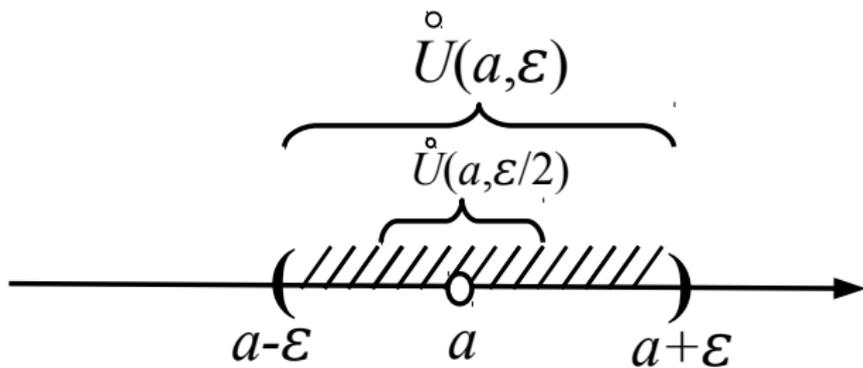
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

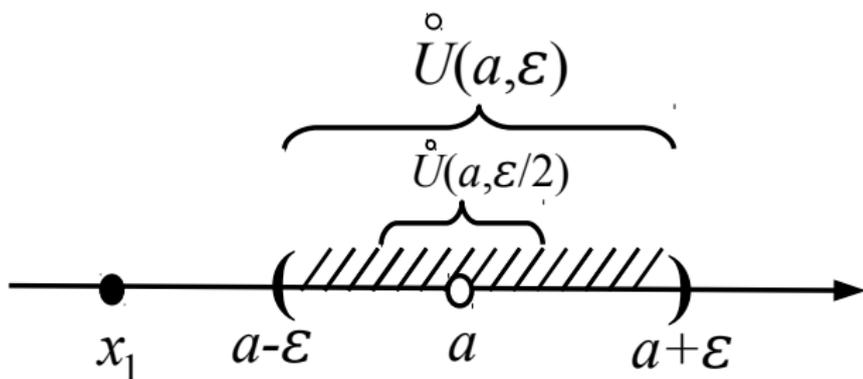
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

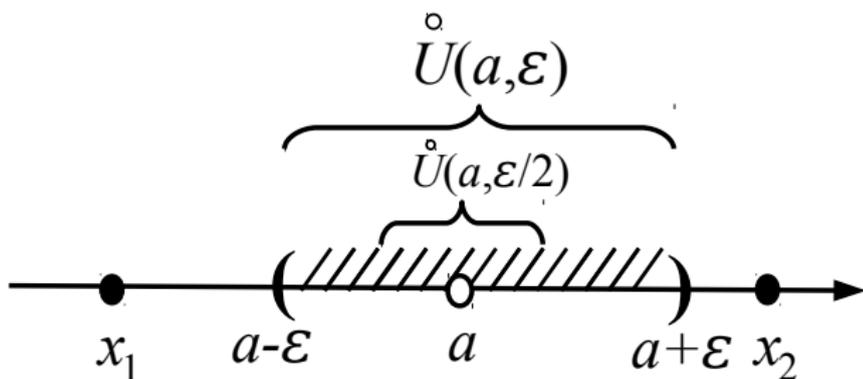
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

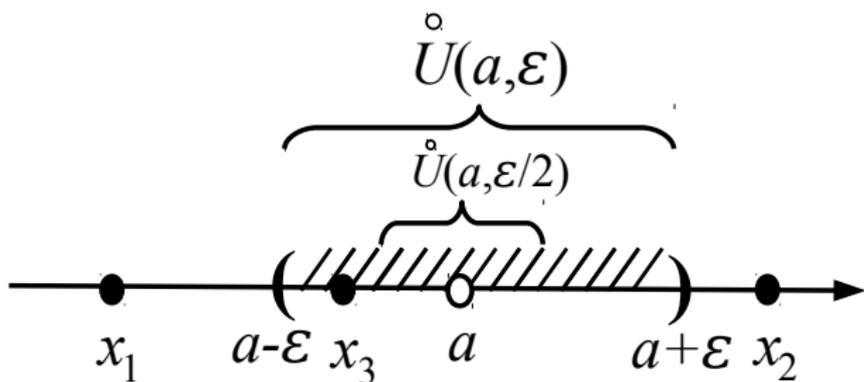
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

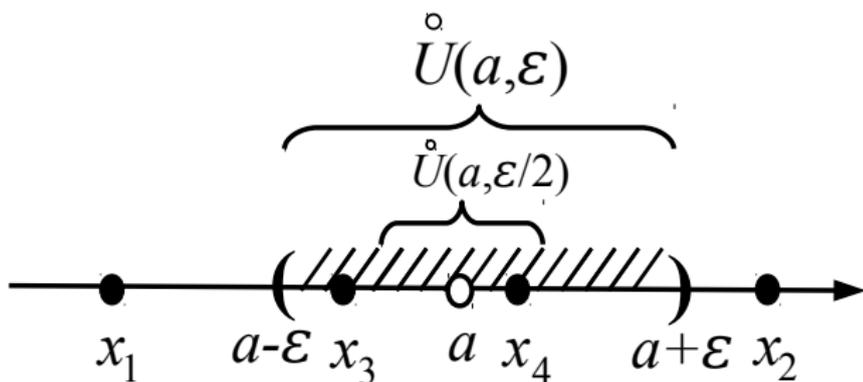
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

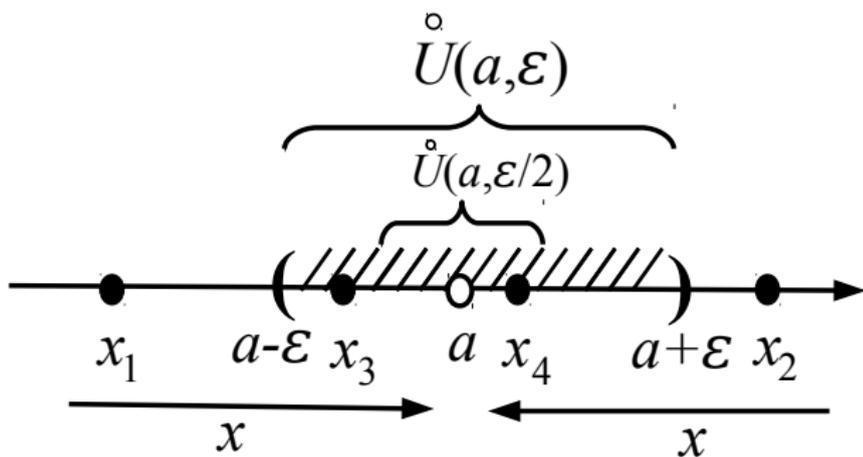
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Предел функции



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и
пусть $x \rightarrow a$,



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$, т.е. x последовательно принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которые с ростом n приближаются к точке a .



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$, т.е. x последовательно принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которые с ростом n приближаются к точке a . Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, которая, в свою очередь, с ростом n приближается к некоторой точке b .



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции

$f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

последовательность значений функции

$\{f(x_n)\}$ сходится к точке b , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

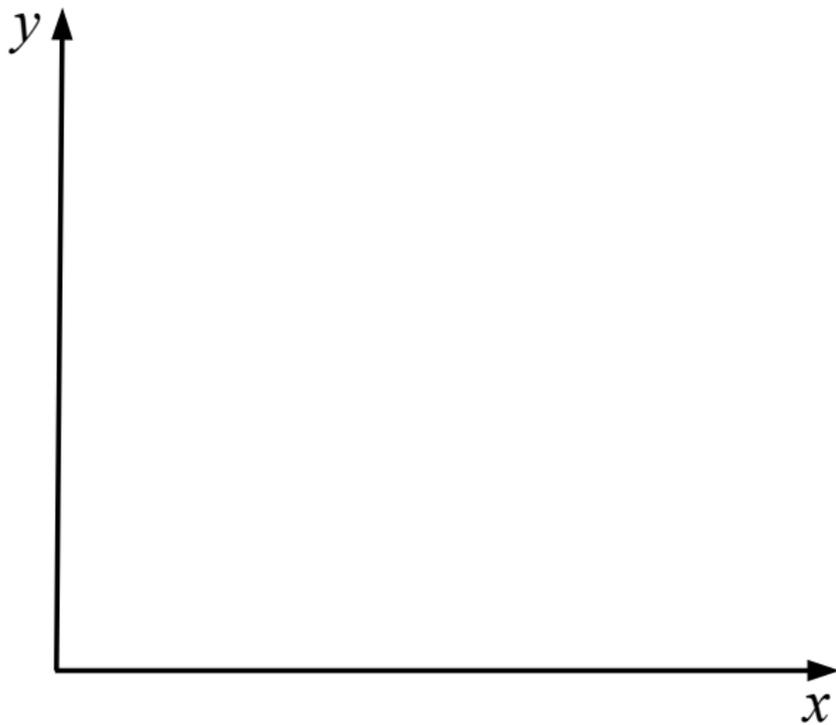
последовательность значений функции

$\{f(x_n)\}$ сходится к точке b , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

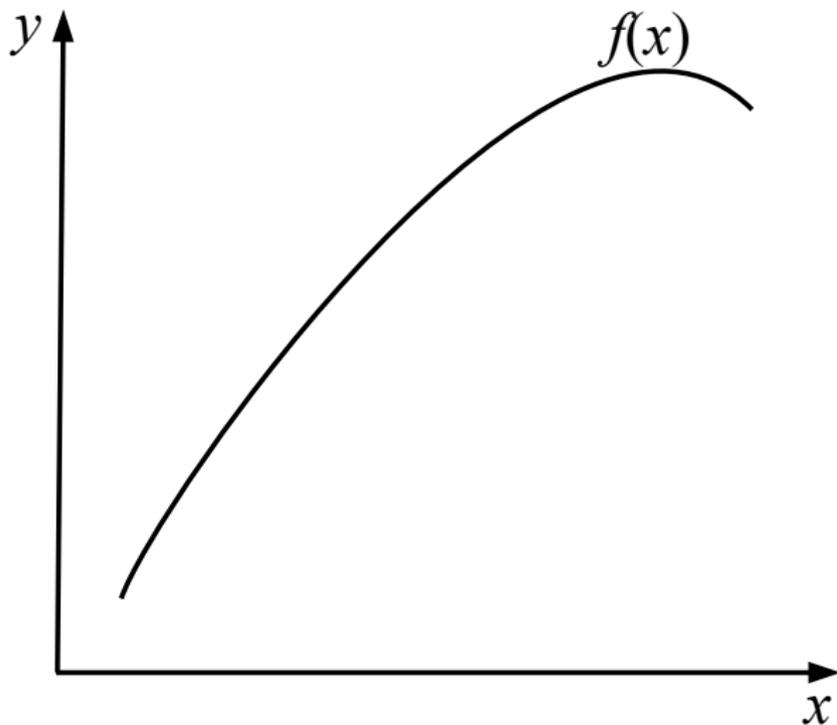
Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



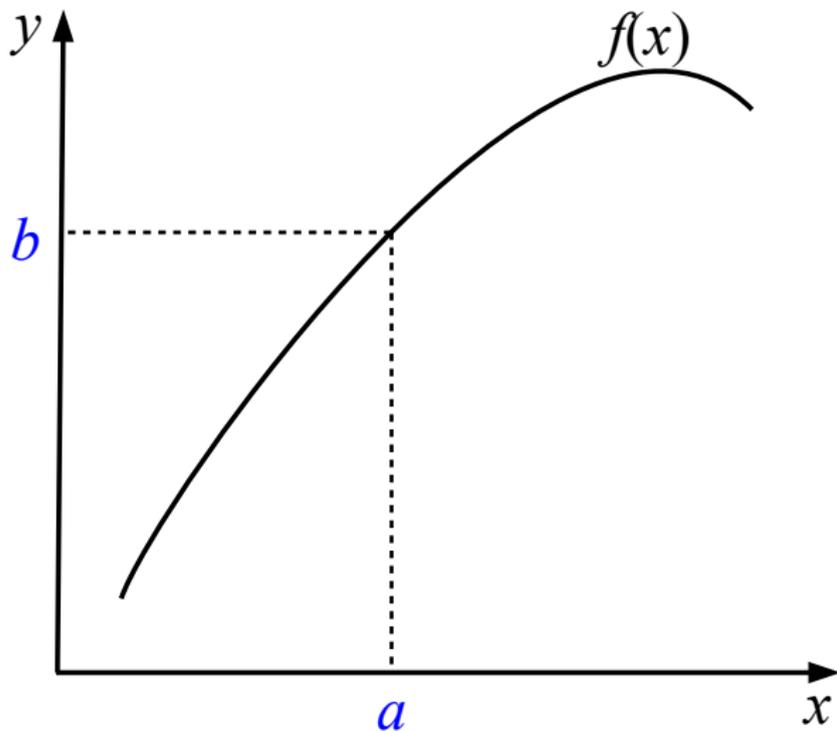
Предел функции



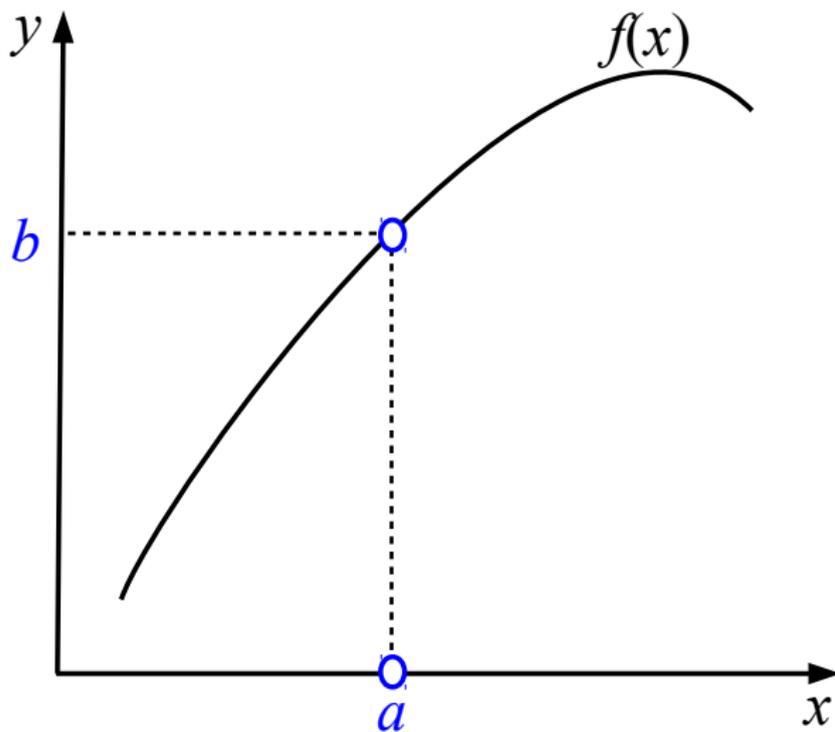
Предел функции



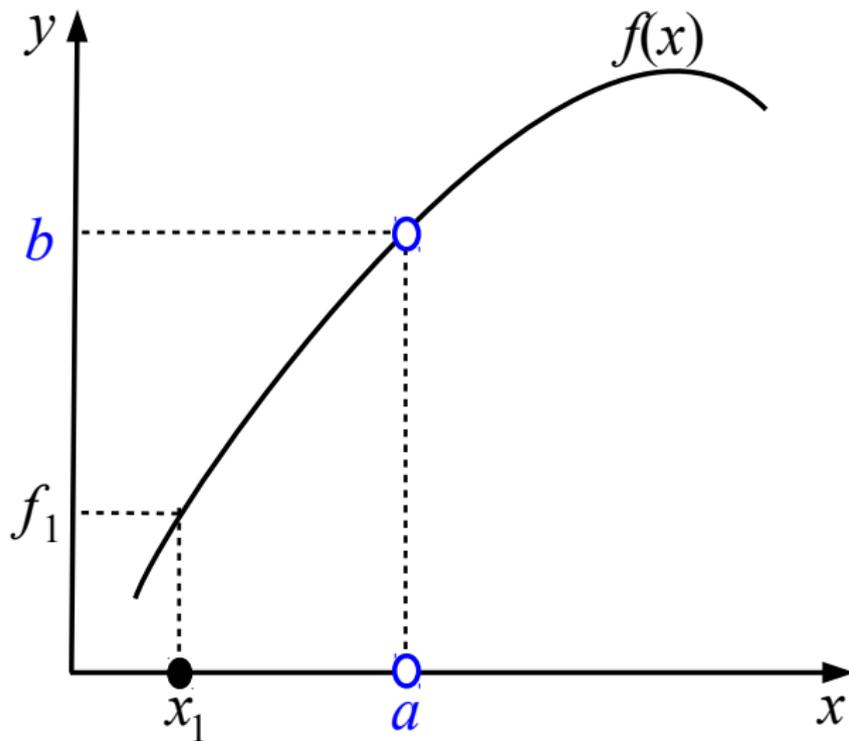
Предел функции



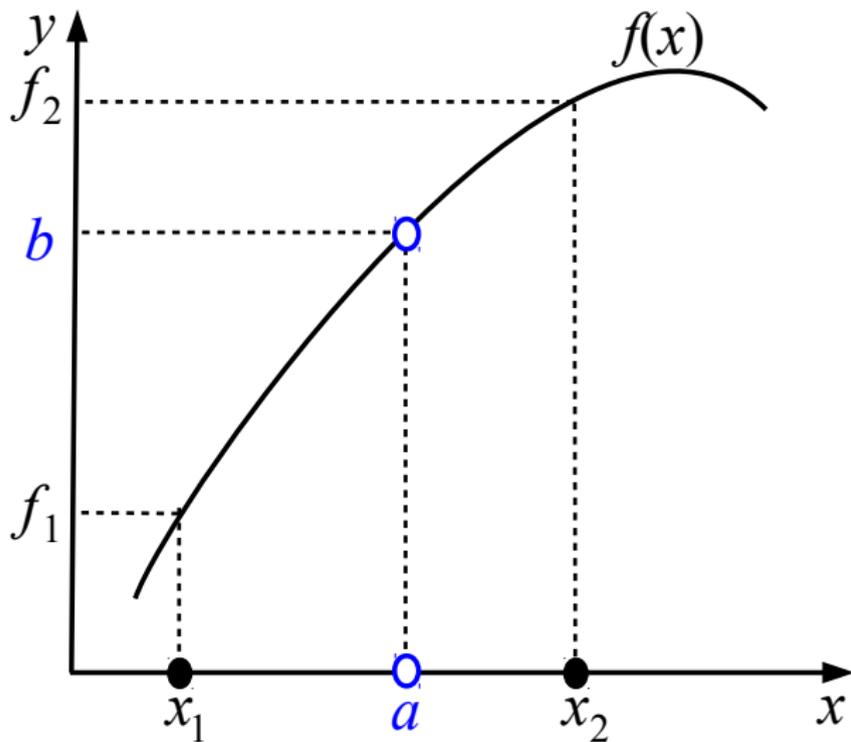
Предел функции



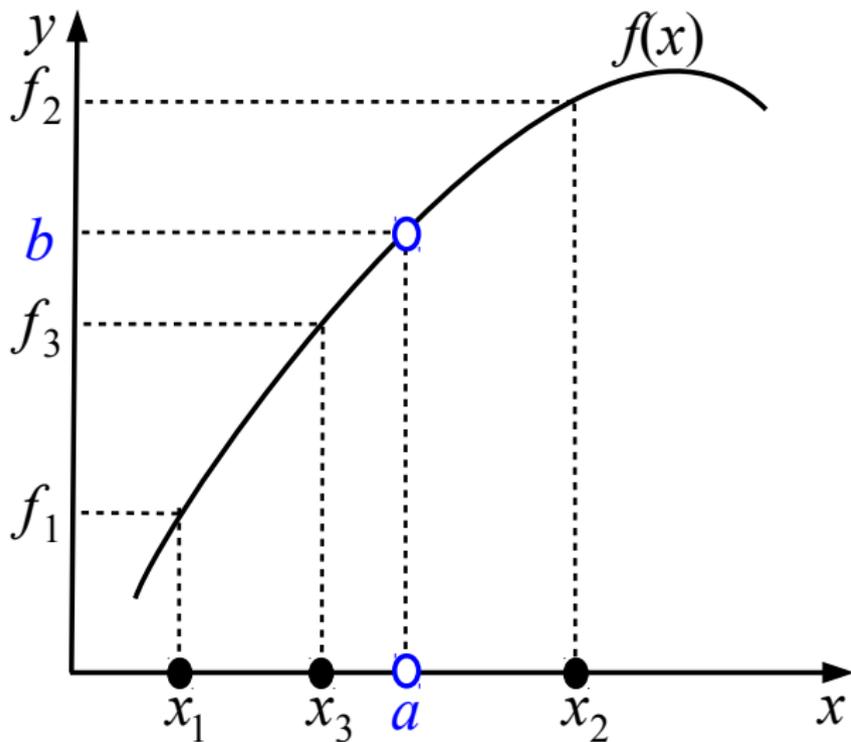
Предел функции



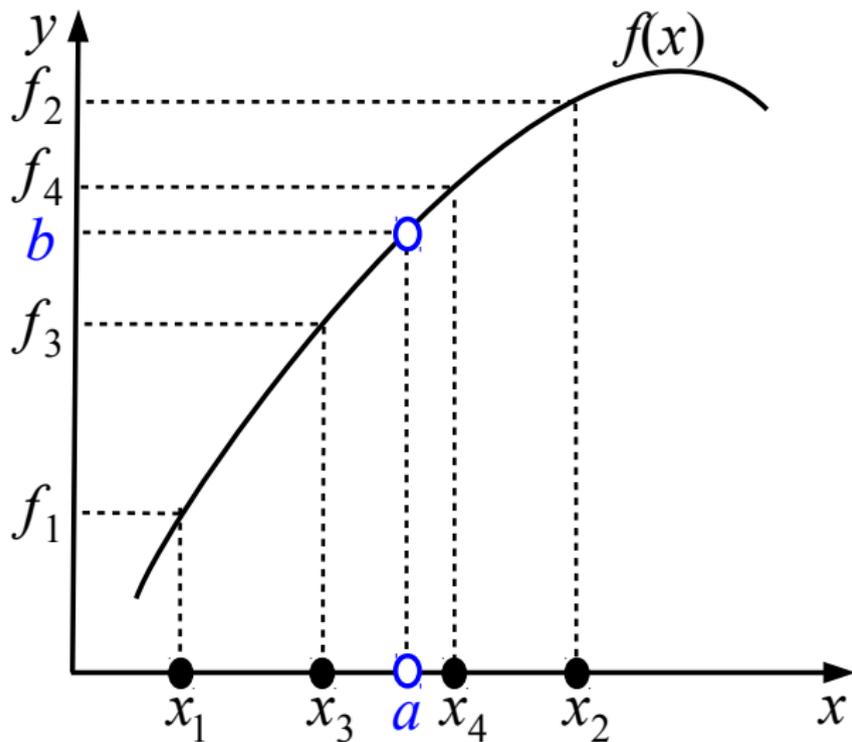
Предел функции



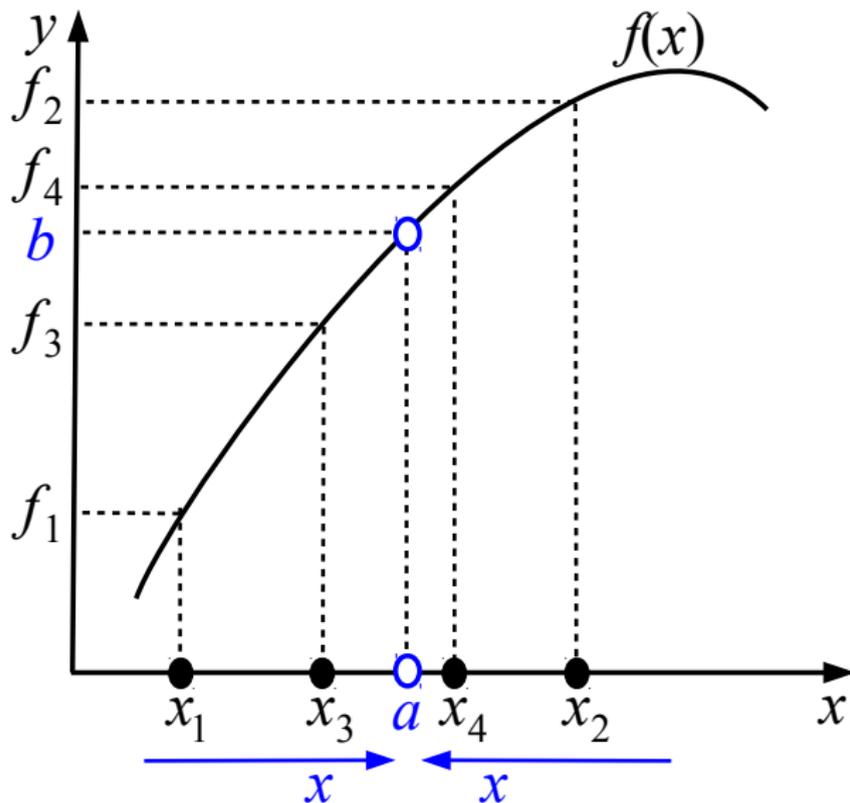
Предел функции



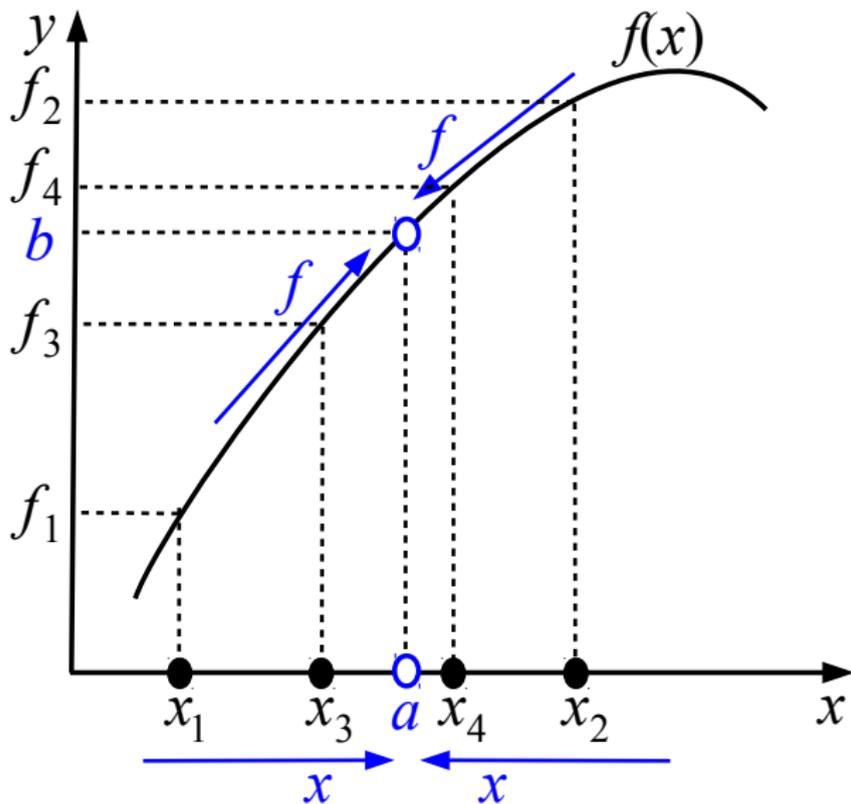
Предел функции



Предел функции



Предел функции



Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями.

Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.



Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями.

Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.

Сформулируем еще два **эквивалентных** определения предела, которые используются при доказательстве теорем.



Предел функции

Определение

(в терминах окрестностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \mathring{U}(a, \delta) \forall x \in \mathring{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon).$$



Предел функции

Расшифровка математических символов:



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε -окрестности точки b



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколота δ -окрестность точки a , что



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколота δ -окрестность точки a , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколота δ -окрестность точки a , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколота δ -окрестность точки a , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b, \varepsilon)$ - значение функции f в точке x принадлежит ε -окрестности точки b



Предел функции

Определение

(в терминах неравенств для конечных точек)

Конечная точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a - конечная точка, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta: \\ |f(x) - b| < \varepsilon$$



Предел функции

Расшифровка математических символов:



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ , зависящее от ε , что



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ , зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ - для любого действ. числа x



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ , зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ - для любого действ. числа x

, - удовлетворяющего условию



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ , зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ - для любого действ. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ , зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ - для любого действ. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ , зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ - для любого действ. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

$|f(x) - b| < \varepsilon$ - $|f(x) - b|$ меньше ε



Предел функции

Арифметические свойства пределов



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем

b и c - конечные числа, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем

b и c - конечные числа, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$$



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем

b и c - конечные числа, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = b/c, \text{ если } c \neq 0$$



Односторонние пределы



Односторонние пределы

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\forall n x_n < a$ ($x \rightarrow a - 0$), последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .



Односторонние пределы

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и

$\forall n \ x_n < a$ ($x \rightarrow a - 0$), последовательность

значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.



Односторонние пределы

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\forall n x_n > a$ ($x \rightarrow a + 0$), последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .



Односторонние пределы

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и

$\forall n x_n > a$ ($x \rightarrow a + 0$), последовательность

значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.



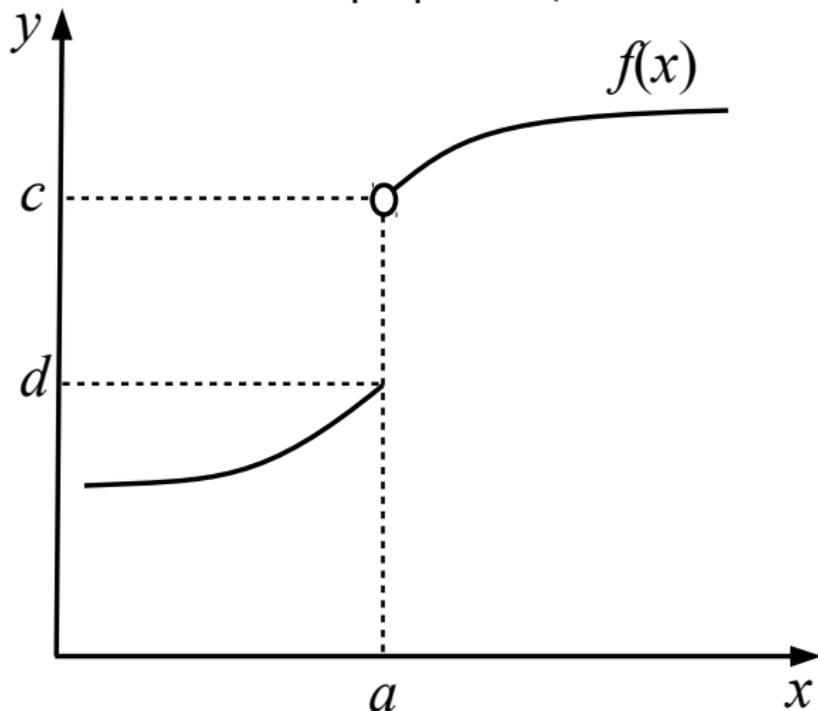
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



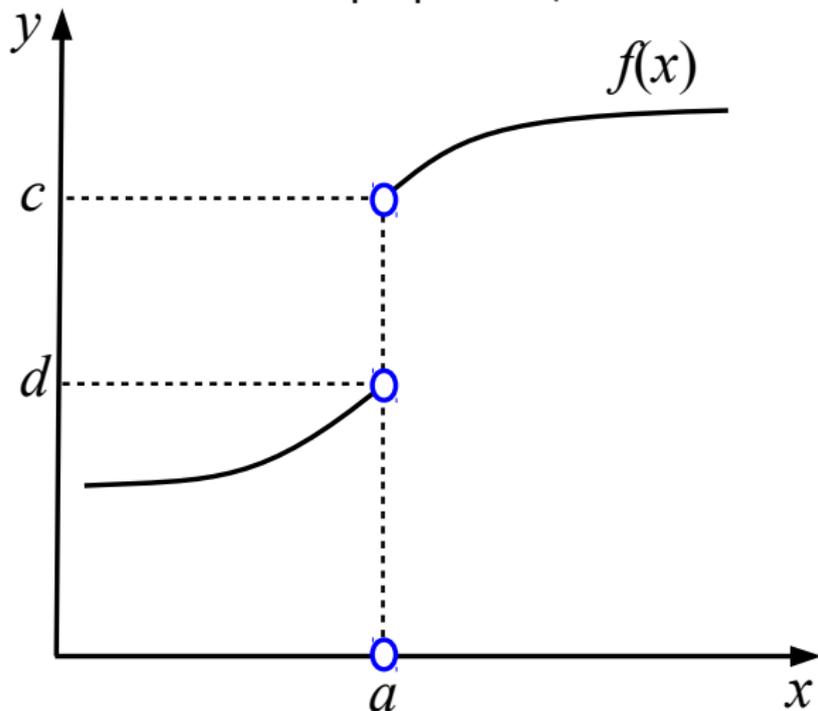
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



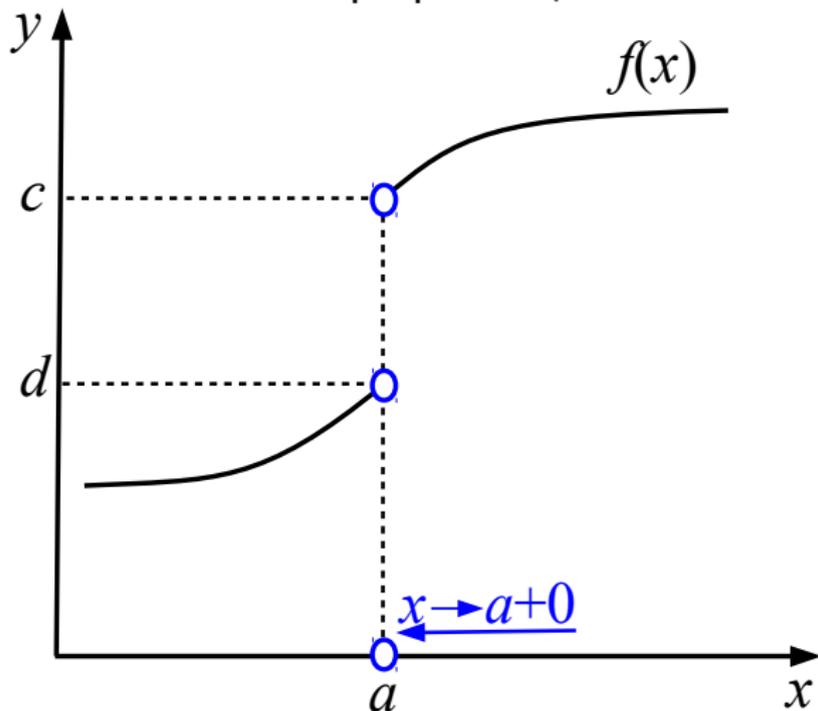
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



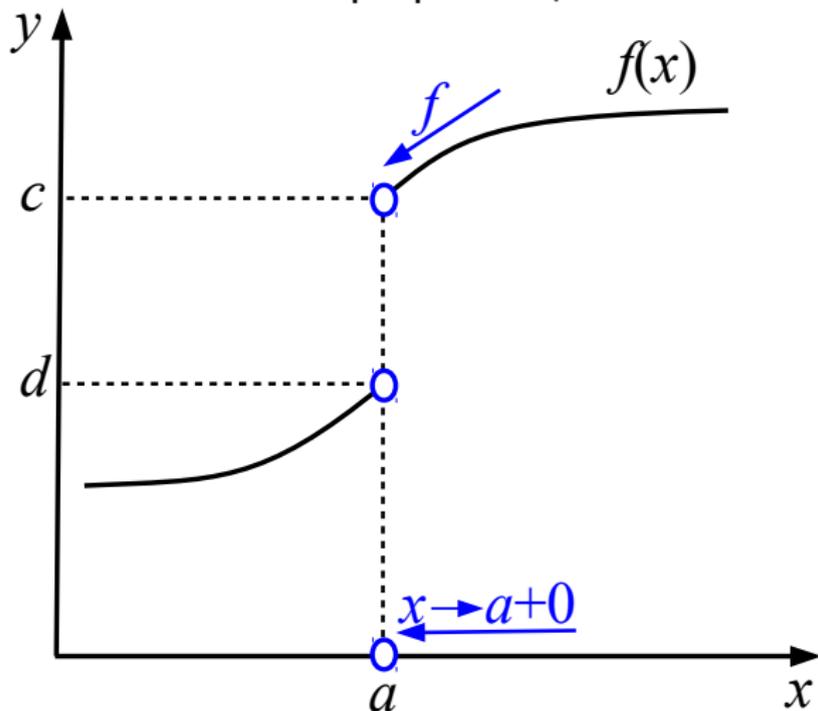
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



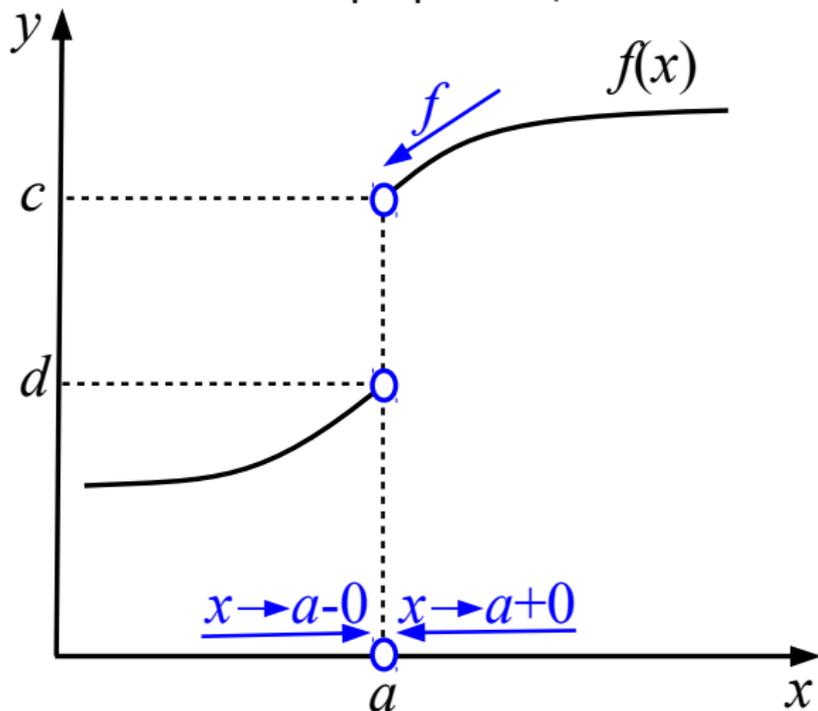
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



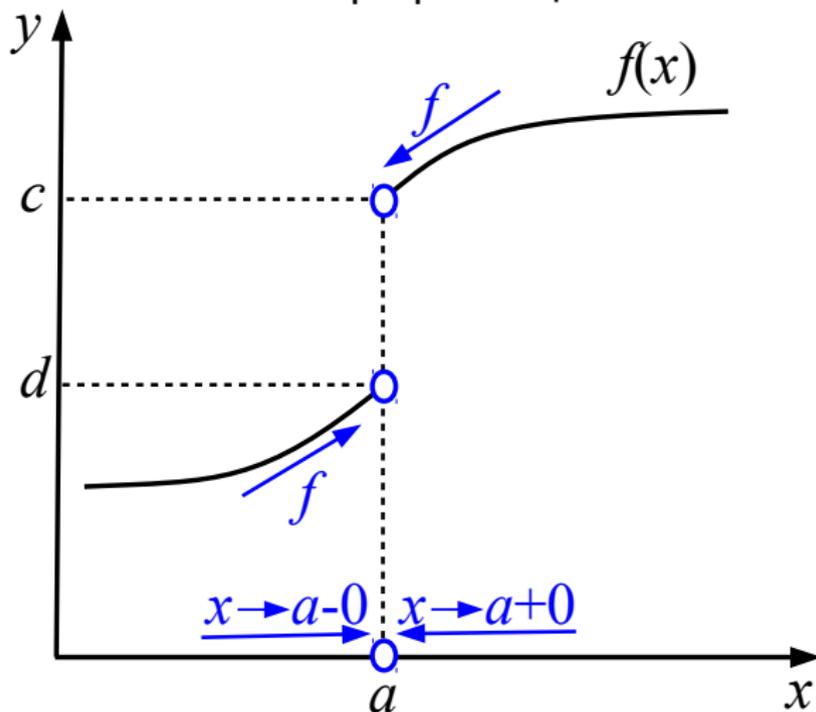
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



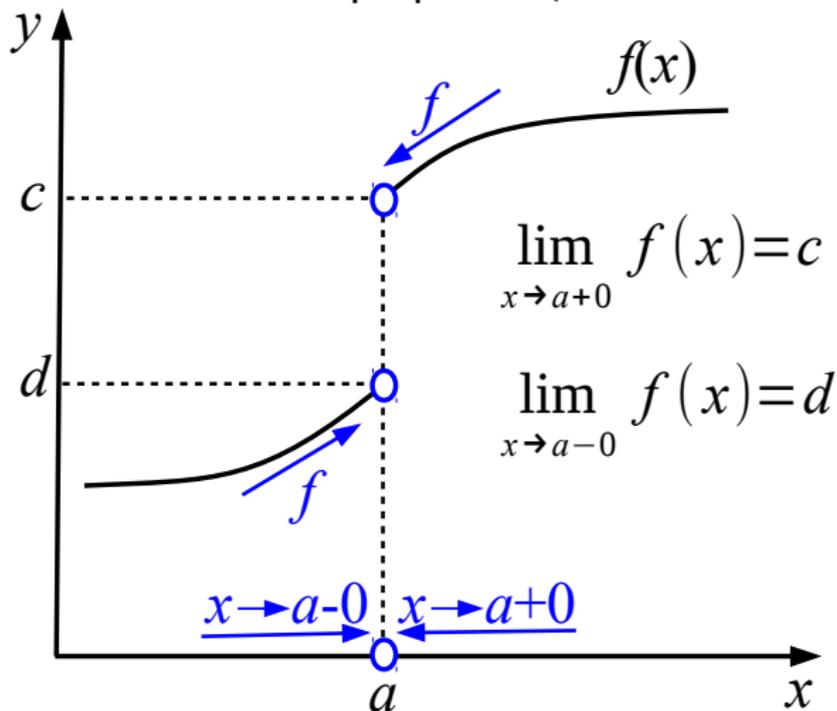
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)



Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.

